

## UNIDAD 5

# ***Flujo de un Fluido Real en Conductos a Presión.***

### **5.0 Introducción:**

En esta unidad aplicaremos las ecuaciones de Continuidad y Bernoulli al estudio de los fluidos reales incompresibles con flujo permanente y unidimensional en conductos a presión, dicho de manera más sencilla: líquidos reales conducidos por tuberías, en donde la determinación de las pérdidas de energía, de carga o pérdidas por fricción ocupan un papel central pero siempre formando parte de la ecuación de Bernoulli.

La importancia de las tuberías en nuestra vida queda de manifiesto cuando consideramos algunas aplicaciones: el agua dentro de nuestras casas fluye por una red interna, y proviene de la red municipal, que según la ciudad puede tener cientos o miles de kilómetros. En el caso de la ciudad de México, por citar un ejemplo, llega a 1048 km de tuberías primarias y a 12 278 km de red secundaria y a más de 500 km de líneas de conducción y acueductos<sup>1</sup>. Otro sistema de tuberías que usamos constantemente es el sistema circulatorio, cuyos vasos sanguíneos alcanzan los 98 000 km de longitud (más de dos veces la vuelta a la tierra)<sup>2</sup>. En las diversas industrias la conducción de fluidos a presión también es muy común, tanto para transportar al fluido en sí como para transportar energía en los sistemas de calefacción y refrigeración. Como otro ejemplo podemos mencionar que PEMEX Refinación cuenta con una red de oleoductos y poliductos de 14 182 km<sup>3</sup>. Por lo anterior, la formación de cualquier ingeniero debe incluir la mecánica de fluidos básica y la relacionada con las tuberías.

---

<sup>1</sup> SACM, GDF. 2005

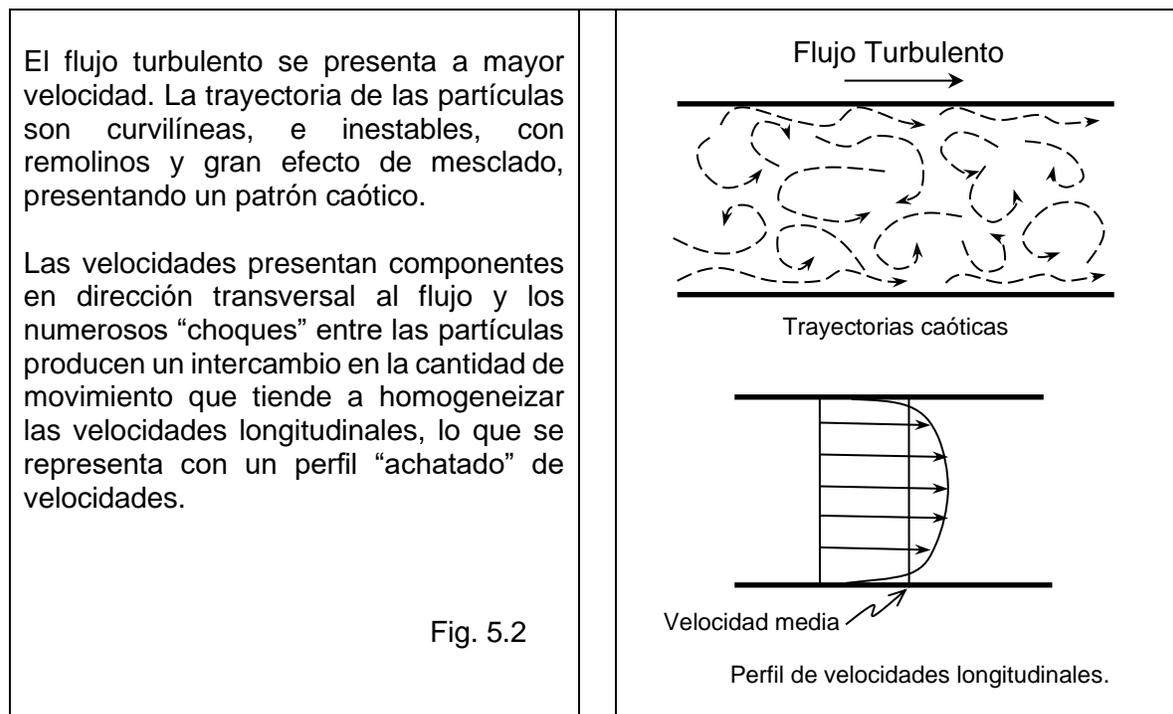
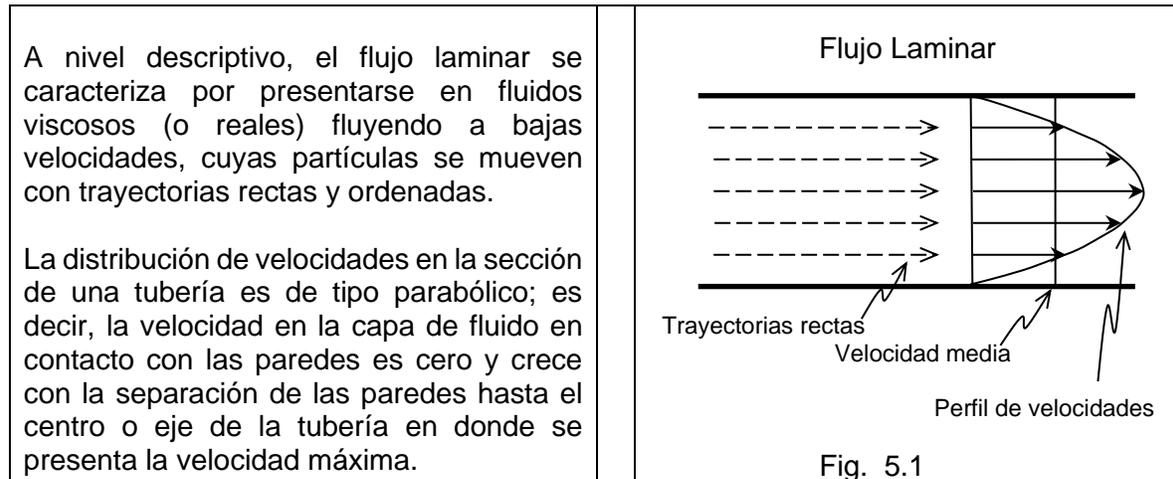
<sup>2</sup> Curiosidades del cuerpo humano en números. En <http://es.slideshare.net/promosmx.com/curiosidades-del-cuerpo-humano-en-numeros?related=2>

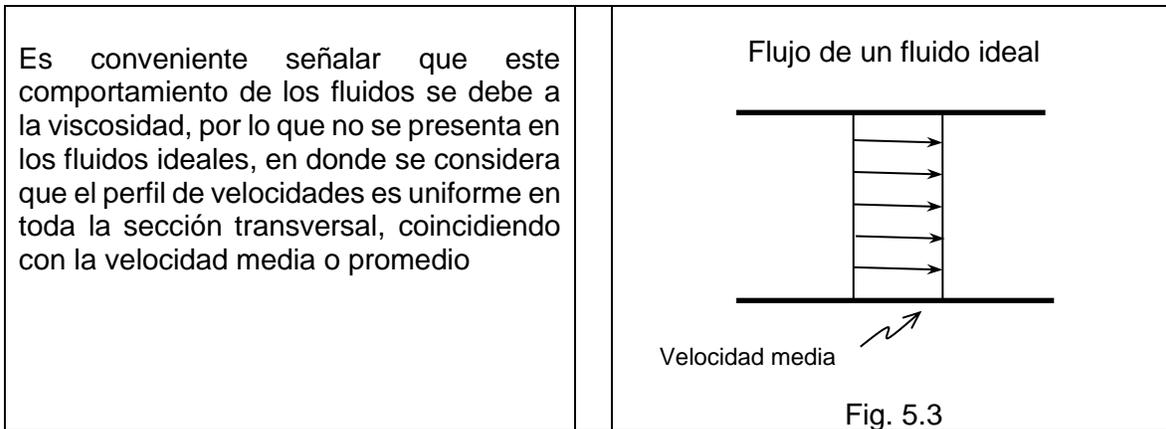
<sup>3</sup> Infraestructura de Plantas de Proceso, Sistema de Ductos y Terminales de Almacenamiento y Reparto. 2012. <http://www.ref.pemex.com/files/content/03transparencia/RC/REF05.pdf>

### 5.1 Flujos reales y el experimento de Reynolds.

La conducción de fluidos reales incompresibles, en conductos a presión, está caracterizada por las pérdidas de energía ocasionadas por la viscosidad del fluido; es decir, por la resistencia interna al escurrimiento o flujo, que a su vez se origina en la cohesión y en el intercambio en la cantidad de movimiento de las moléculas o partículas del fluido; sin embargo a nivel macro esta resistencia se presenta como esfuerzos cortantes entre las paredes del conducto y el fluido adyacente y entre sucesivas capas de fluido.

Para entrar en tema es necesario recordar la clasificación inicial de los flujos y las diferencias entre el flujo laminar y el flujo (o régimen) turbulento.





Como hemos mencionado el tipo de flujo depende de la velocidad y de la viscosidad, pero también depende del diámetro del conducto y de la densidad del fluido. Osborne Reynolds, ingeniero y físico irlandés realizó múltiples experimentos y en 1883 encontró una relación entre los factores que intervienen, a la cual se le conoce actualmente como “Número de Reynolds”

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

5.1

Donde:  $V$  = velocidad media en la sección transversal de la tubería,  $D$  = Diámetro;  $\rho$  = densidad;  $\mu$  = viscosidad dinámica y  $\nu$  = viscosidad cinemática

Reynolds colocó un tubo de vidrio horizontal con una válvula en uno de sus extremos y un tanque de alimentación en otro. La entrada al tubo tenía forma de campana y contaba además con una aguja alimentada por un depósito de tinta (de la misma densidad que el agua) para inyectar una corriente de tinta sumamente fina desde la entrada del tubo.

Para gastos pequeños (y por lo tanto velocidades bajas) la corriente de tinta se mantenía como un delgado filamento a lo largo del tubo, indicando que las trayectorias eran rectas y paralelas, el flujo se comportaba como si estuviera formado por capas o láminas concéntricas, por ello se le llamó **flujo o régimen laminar**.

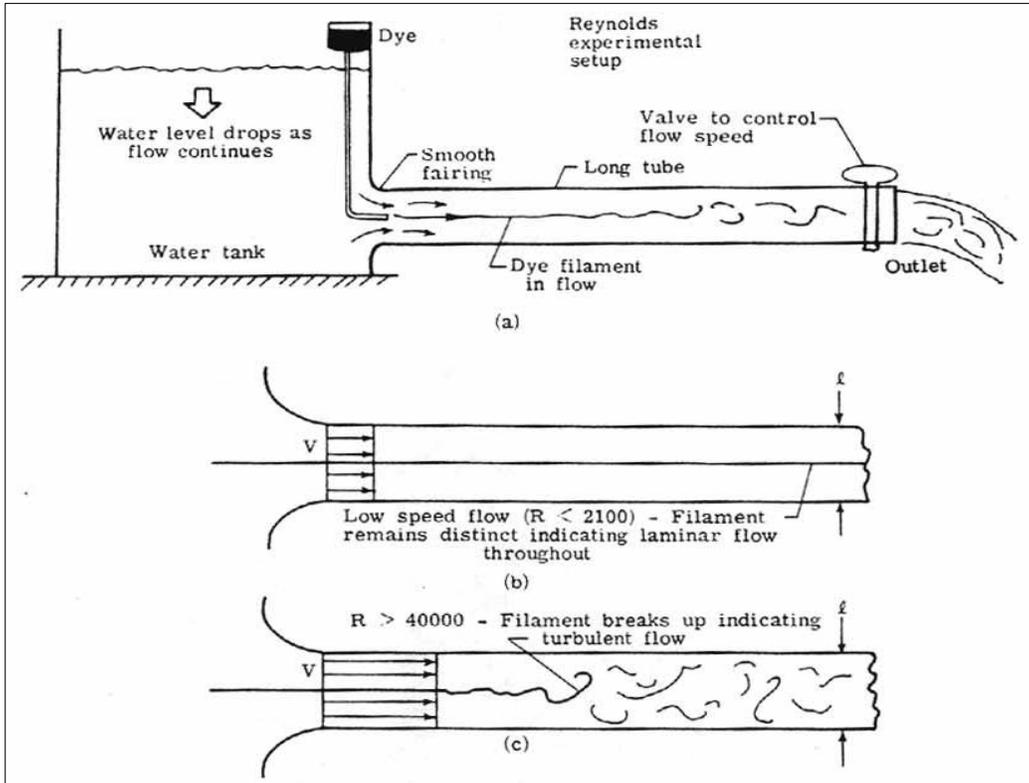
Al incrementar el gasto (aumentando por consiguiente la velocidad) el filamento de tinta ondulaba y empezaba a oscilar (**flujo de transición**) y a formar bucles hasta que de pronto la tinta se difundía bruscamente en todo lo ancho de tubo demostrando que el flujo había cambiado y ahora existía mucha agitación y mezclado; es decir, turbulencia. El flujo había cambiado a **turbulento**.

Reynolds realizó mediciones cuidadosas, aumentando poco a poco el caudal y midió diversos valores de la relación que ahora lleva su nombre, en el momento que el régimen rompía a turbulento. Estos valores iban de 10 000 a 12 000. Incluso si se dejaba que el agua del tanque permaneciera en calma y se impedía que hubiera vibraciones durante el

experimento, investigadores posteriores obtuvieron números de Reynolds tan altos como 40 000, antes de que el régimen rompiera a turbulento.

A este límite se le llamó **número crítico superior**, pero su significado carece de valor práctico, ya que la multiplicidad de valores, la inestabilidad del fenómeno y el hecho que las tuberías reales presentan rugosidad en la pared interna y están sometidas a vibraciones impiden que se pueda llegar a números tan altos manteniendo el régimen laminar.

**Experimento de Reynolds Fig. 5.4**



El experimento inverso resultó sorprendente. Si una vez que se tenían gastos y velocidades altas, se empezaban a disminuir poco a poco (cerrando la válvula) el flujo siempre cambiaba a laminar en valores cercanos a **2100**. A este límite se le llamó **número crítico inferior** y es reconocido como el límite antes del cual solo se presenta flujo laminar. El paso de flujo turbulento a transición resultó un poco más inestable, aunque actualmente se considera a 4000 como el límite aceptable.

Flujo laminar	$0 \leq Re \leq 2100$
Flujo de transición	$2100 \leq Re \leq 4000$
Flujo turbulento	$Re > 4000$

Tabla 5.1 Números de Reynolds límites *para tuberías lisas*

Los resultados de estos experimentos sirvieron de base a muchos otros que permitieron avanzar en la comprensión del movimiento de los fluidos en tuberías y a la obtención de

ecuaciones que permitieran estimar el valor de las pérdidas de energía. Así durante la segunda mitad del S XIX y a principios del XX, numerosos investigadores se dedicaron a estudiar la manera de determinar las pérdidas por fricción, buscando hacer coincidir los desarrollos teóricos con los resultados experimentales.

## 5.2 Pérdidas en tuberías.

En 1850 Henry Darcy, ingeniero hidráulico francés y Julius Weisbach, científico alemán, encontraron una ecuación para determinar la pérdida por fricción en tuberías

$$H_f = h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad 5.2$$

Donde:  $f$  (en ocasiones  $\lambda$  lambda) es el factor de fricción sin dimensiones;  $L$  la longitud de la tubería en m,  $D$  es el diámetro del conducto en m y  $v$  es la velocidad media en m/s y  $g$  es la aceleración de la gravedad en  $m/s^2$ .

Esta ecuación también se puede escribir en términos de la pendiente hidráulica o pendiente de fricción  $S_f$

$$S_f = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \frac{v^2}{2g} \quad 5.3$$

Y en algunas ocasiones también es conveniente escribirla en términos del gasto en lugar de la velocidad

$$h_f = f \frac{8LQ^2}{g\pi^2 D^5} \quad 5.4$$

La experimentación demostró que el factor  $f$  depende de la rugosidad  $\epsilon$  de las paredes de la tubería y del número de Reynolds

$$f = f(\epsilon, R_e) \quad 5.5$$

Pero esta relación no es sencilla y existen numerosas ecuaciones para determinar  $f$  según las condiciones de cada caso y la preponderancia que eso otorga a cada factor, como lo fueron determinando diversos investigadores.

Así, para flujo laminar, en tubos lisos y rugosos, *Poiseuille* encontró la relación

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{VD/\nu} \quad 5.6$$

Para tubos lisos y flujo de transición o turbulento en, Schoder y Blasius formularon la siguiente expresión:

$$5.7$$

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}$$

Y Nikuradse (1920) obtuvo la siguiente expresión que es válida para tubos lisos con flujo turbulento ( $2.3 \times 10^4 \leq Re \leq 3.4 \times 10^6$ )

5.8

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2.51}$$

En tubos con rugosidad uniforme y flujo turbulento, Nikuradse propuso

5.9

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71D}{\epsilon}$$

Posteriormente Coolebrook y White desarrollaron una ecuación más general para tubos comerciales, lisos o rugosos, con flujos de transición o turbulentos.

5.10

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

En donde se puede observar que **para tubos lisos** el término  $\epsilon/D$  es muy pequeño por lo que el primer sumando se puede despreciar y **f solo depende de Re**, y para flujo turbulento, con Re muy grande, el segundo sumando se vuelve insignificante con lo cual **f solo depende de  $\epsilon/D$** .

La gran contribución de Nikuradse fueron sus trabajos con tuberías de rugosidad artificial y uniforme, lograda con granos de arena y seis valores de  $\epsilon/D$ . los resultado de sus experimentos los graficó en el diagrama que lleva su nombre

Diagrama de Nikuradse  
Factor  $f$  ó  $\lambda$  (lambda)  
para tubos de rugosidad artificial

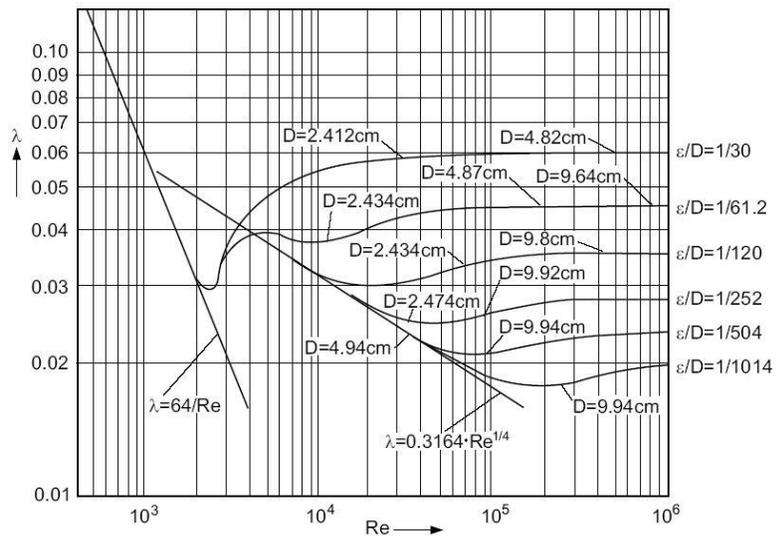


Diagrama de Nikuradse Fig. 5.5

En donde se observa que:

- Para flujo laminar ( $Re < 2300$ )  $f$  solo depende del número de Reynolds y la rugosidad no influye. La recta coincide con la ec. De *Poiseuille*  $f = 64/Re$ .
- A partir de  $Re > 2300$  se inicia la zona de transición, de laminar a turbulento, en donde  $f$  depende tanto de la rugosidad relativa  $\epsilon/D$ , como del número de Reynolds  $Re$ , de manera que los valores experimentales se agruparon de acuerdo a una familia de curvas sin que se pueda establecer una sola ley de variación.
- La zona turbulenta se caracteriza porque las curvas se transforman en rectas horizontales, de manera que por un lado, la zona turbulenta inicia con valores diferentes de  $Re$  de acuerdo a cada rugosidad relativa  $\epsilon/D$ , y por otro, en la zona turbulenta (valores grandes de  $Re$ ) el valor de  $f$  solo depende de  $\epsilon/D$ . de manera que al relacionarlo con la fórmula de Darcy- Weisbach se observa que  $f$  depende del cuadrado de la velocidad.

Los resultados de Nikuradse se encontraban limitados por el hecho de que las rugosidades en los tubos comerciales son muy diferentes a la rugosidad uniforme de los granos de arena, interviniendo además otros factores como la forma y frecuencia de las juntas, el remachado o tipo de soldadura y las alteraciones en el tiempo debidas a los depósitos de sales (incrustaciones) o al óxido y la corrosión.

Rugosidad uniforme y  
rugosidad comercial

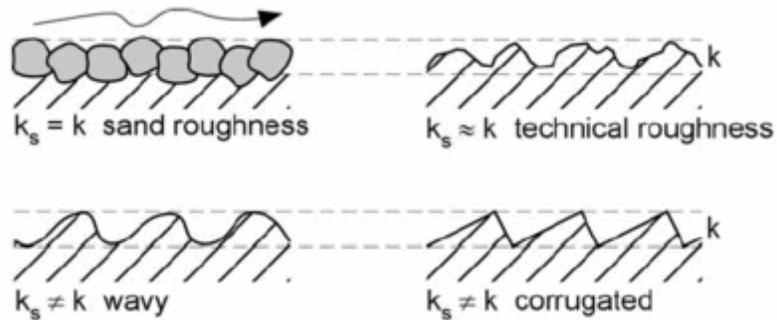
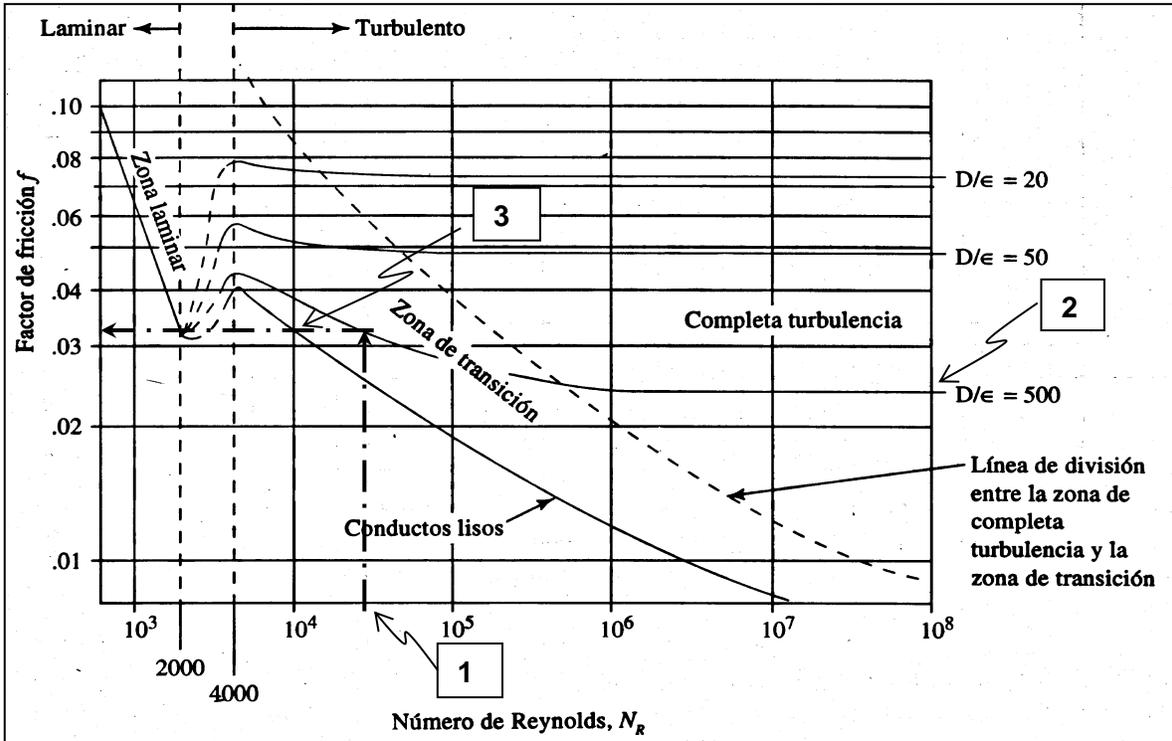


Fig 5.6

Investigadores posteriores a Nikuradse adoptaron el concepto de rugosidad media o equivalente  $\epsilon$  (también llamada rugosidad absoluta) y lo adaptaron a tuberías comerciales. De manera que, con base en estos resultados, Lewis Ferry Moody elaboró el diagrama que lleva su nombre, para determinar el factor  $f$  en tuberías comerciales que transportan cualquier fluido.

En dicho diagrama se observan las mismas características que en el diagrama de Nikuradse, aunque las curvas en la zona de transición son más suaves. Ver diagrama simplificado de Moody.

Fig. 5.7 Diagrama simplificado de Moody



- En la zona laminar  $f$  solo depende de  $Re$  de acuerdo a la ecuación de una línea recta  $f = 64/Re$
- La curva inferior corresponde a los tubos lisos y coincide parcialmente con la ecuación de Blasius.
- Cuando  $Re$  está entre 2000 y 4000 el flujo está en una zona crítica inestable y por lo tanto indefinida.
- En la zona de transición las gráficas son curvas y  $f$  depende claramente de  $\epsilon/D$  y de  $Re$
- En la zona turbulenta, las gráficas se tornan rectas horizontales y  $f$  solo depende de  $\epsilon/D$

La forma de encontrar el valor de  $f$  es: **1)** entrar a la gráfica en el eje inferior con el número de Reynolds y subir hasta donde se encuentre **2)** la curva correspondiente al valor de  $\epsilon/D$  (los valores están indicados en el extremo derecho de cada curva) en ese punto **3)** nos movemos hacia la izquierda siguiendo una línea recta horizontal hasta encontrar el valor correspondiente a  $f$ . (Ver la línea de punto y raya en el diagrama simplificado).

Es conveniente resaltar que las escalas son logarítmicas por lo que se debe ser cuidadoso en la lectura de los valores. Otra característica notable, es que al ser los factores  $\epsilon/D$  y  $Re$  números adimensionales, el diagrama es válido para cualquier sistema de unidades. Nótese que  $\epsilon$  y  $D$  deben estar en las mismas unidades, (normalmente mm).

Algunos valores de la rugosidad absoluta  $\epsilon$  se dan en la siguiente tabla.

Material de la tubería	$\epsilon$ en mm
Vidrio, cobre, latón, plástico, hule, acero nuevo pintado sin costura	0.0015
Fierro fundido nuevo	0.25
Fierro fundido oxidado	1 a 1.5
Fierro fundido recubierto con asfalto	0.12
Fierro galvanizado	0.15
Acero soldado nuevo	0.05 a 0.10
Acero oxidado con pocas incrustaciones	0.4
Acero oxidado con muchas incrustaciones	3
Asbesto-cemento nuevo	0.025
Concreto centrifugado nuevo	0.16
Concreto en galerías colado con cimbra normal de madera	1 a 2
Concreto de acabado liso	0.025
Cemento no pulido	1 a 2

**Tabla 5.2** Algunos valores de rugosidades absolutas. Tomado de Sotelo A<sup>4</sup>.

Como podemos observar los valores de la rugosidad y por lo tanto de la rugosidad relativa, pueden sufrir grandes variaciones para un mismo material dependiendo del estado de uso, de las incrustaciones y/o de la corrosión, por lo cual en la elección de los valores se debe utilizar el criterio y la experiencia<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> Sotelo Avila. Hidraulica General. Ed. Limusa-Noriega pp 285-286

<sup>5</sup> En el Sotelo se propone una ecuación según el tipo de agua y los años de servicio p 283

También se puede obtener la rugosidad relativa  $\epsilon/D$  a partir del diagrama preparado por Moody.

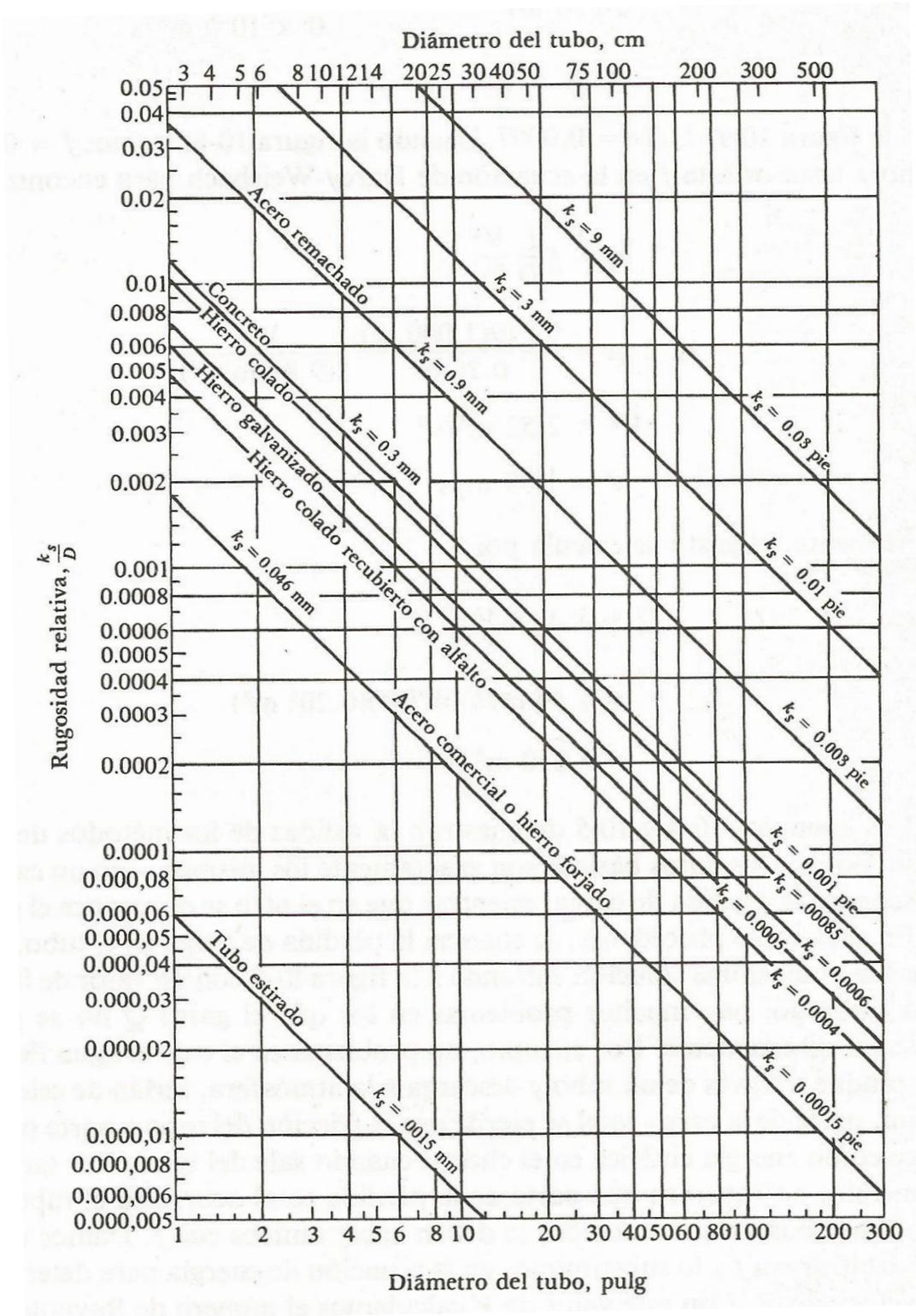


Fig. 5.9 Rugosidad relativa según Moody

### 5.3 Problemas de tuberías.

Todos los problemas de fluido real con flujo permanente a lo largo de tuberías se pueden resolver con las ecuaciones de Continuidad y de Bernoulli, que para aplicarse a fluidos reales debe contener un término que considere las pérdidas por fricción, de manera resumida la ecuación de Bernoulli se puede escribir:

“La suma de energías específicas en la sección 1 de un conducto, menos las pérdidas de energía de 1 a 2 son iguales a la energía específica en la sección 2

$$\sum H_1 - Hf_{1-2} = \sum H_2$$

O de manera extendida

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - Hf_{1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Aunque también se acostumbra ubicar las pérdidas en el segundo miembro de la Ec.

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + Hf_{1-2}$$

Es conveniente realizar el diagrama de las líneas de energía de manera que se puede ver las variaciones de las energías de posición, presión y velocidad a lo largo de todo el conducto, ayudando a una mejor comprensión del problema y de la solución.

En general los problemas de ingeniería relacionados con flujos en tuberías se pueden agrupar en los siguientes tipos:

- 1.- Determinar las pérdidas de carga y las variaciones de presión a partir del gasto y de las características de la tubería (D, L, material o  $\epsilon$ , entre otras).
- 2.- Encontrar el gasto que puede circular, a partir de la carga o energía disponible y de las características de la tubería (Revisión).
- 3.- Calcular del diámetro requerido para conducir un gasto determinado, entre dos secciones del conducto, con diferencia de presiones conocida (Diseño).

El primero de estos problemas “tipo” puede resolverse directamente; pero el segundo y el tercero requieren de aproximaciones sucesivas, partiendo de propuestas iniciales debido a que el factor  $f$  depende de  $Re$ , que a su vez depende del gasto, velocidad y/o diámetro, que son las incógnitas; Sin embargo es conveniente tomar en cuenta que en la mayoría de las tuberías reales se presentan flujos plenamente turbulentos; es decir con altos valores de  $Re$  en tubos rugosos, de manera que  $f$  solo depende de  $\epsilon/D$ , y la propuesta inicial de  $f$  es

muy cercana o coincide con el valor correcto de manera que el número de iteraciones se reduce notablemente. Lo anterior se ilustrará en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 5.1:** En un tubo de hierro fundido recubierto con asfalto de 30 cm de diámetro se conduce agua a 20 °C con un gasto de 90 lt/s, ¿Cuál es la pérdida de carga por km de longitud de la tubería?

<p><b>Solución:</b>                  La velocidad será:  <math display="block">V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(0.09)}{\pi(0.3)^2} = 1.27 \text{ m/s}</math>                 La viscosidad cinemática del agua a 20°C la obtenemos de tablas:  <math display="block">\nu = 1.003 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}</math>                 El número de Reynolds  <math display="block">Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.27(0.3)}{1.003 \times 10^{-6}} = 3.799 \times 10^5</math>                 La rugosidad <math>\epsilon</math> para el hierro fundido recubierto con asfalto es 0.12 mm (Tabla 5.2)                  La rugosidad relativa es  <math display="block">\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.12 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 0.0004</math> </p>	<p>Que coincide con la lectura de la Fig. 5.9.                  Con los valores de Re y <math>\epsilon/D</math> entramos al Diagrama de Moody y obtenemos:  <math display="block">f = 0.0173</math>                 De manera que ya podemos determinar la pérdida de carga por Darcy-Weisbach  <math display="block">h_f = f \frac{L v^2}{D 2g} = 0.0173 \frac{(1000)1.27^2}{(0.3)^2(9.81)}</math> <math display="block">h_f = 4.74 \text{ m}</math>                 Que es la pérdida de carga por km de longitud             </p>
---	--

**Ejemplo 5.2.** En conducción de agua potable o para riego es común usar tubería de polipropileno o polietileno de alta densidad (“extrupak”) que es flexible y presenta gran resistencia a diversos esfuerzos mecánicos, lo que le permite adaptarse al terreno y minimizar los costos de excavación. Considerando estas ventajas, se decidió usar este material para conducir agua desde un tanque situado a 20 m por encima de la salida de la tubería de 3.5 km de longitud y 10 cm de diámetro. Determinar el gasto de agua que circula por dicha tubería.

**Solución Ejemplo 5.2:** Como la tubería es de plástico podemos considerarla lisa. De la tabla 5.2 obtenemos

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.0015 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 0.000015$$

Al buscar en el Diagrama de Moody la curva correspondiente a  $\varepsilon/D$  vemos que con esta rugosidad no alcanza a formarse flujo plenamente turbulento ni con los Re más altos, confirmando que debemos usar la curva de tubo liso. Entonces, podemos proponer un Re de  $10^5$  y en Moody leemos (con la curva de tubo liso)

$$f = 0.018$$

Si queremos sustituir en Darcy-Weibach

$$Hf = f \frac{L v^2}{D 2g} = 0.018 \frac{3500}{0.1} \frac{1}{2(9.81)} v^2$$

$$Hf = 32.11 v^2$$

Nos damos cuenta que tenemos dos incógnitas, entonces recurrimos a la ec. de Bernoulli de 1 a 2 donde:

$$P_1 = P_2 = P_{atm} = 0 \text{ (rel)}$$

$Z_1 = 20 \text{ m}$ ;  $Z_2 = 0 \text{ m}$ ;  $v_1 = 0$  en la superficie del tanque. Ver figura

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + Hf$$

$$0 + 20 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_2^2}{2g} + Hf$$

$$20 = \frac{v_2^2}{2(9.81)} + 32.11 v^2$$

$$20 = 0.051 v^2 + 32.11 v^2$$

Donde se ve claramente que el valor de la energía específica de velocidad es muy pequeño en Bernoulli. Por ello algunas veces no se considera.

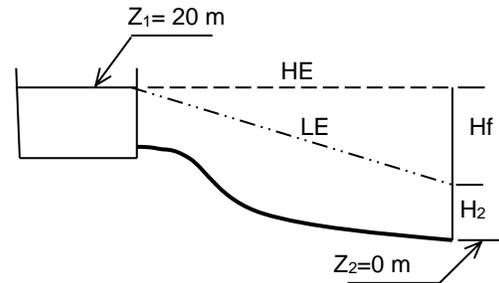
También vemos que la energía disponible no es mucha (20 m) por lo que la velocidad no puede ser alta y Re tampoco, confirmando la elección que hicimos. Entonces

$$v = 0.7886 \text{ m/s}$$

con esta velocidad calculamos Re

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.788(0.1)}{1.139 \times 10^{-6}} = 6.9 \times 10^4$$

Con este valor iniciamos una nueva iteración. De Moody obtenemos



$$f = 0.019$$

Sust en Darcy-Weibach

$$Hf = f \frac{L v^2}{D 2g} = 0.019 \frac{3500}{0.1} \frac{1}{2(9.81)} v^2$$

$$Hf = 33.89 v^2$$

Sust. en Bernoulli

$$20 = 0.051 v^2 + 33.89 v^2$$

$$v = 0.767 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad podemos calcular el nuevo Re

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.767(0.1)}{1.139 \times 10^{-6}} = 6.7 \times 10^4$$

Que es muy cercano al valor obtenido en la iteración anterior, si buscamos  $f$  en Moody podemos leer un valor estimado de  $f = 0.0192$

Sust en Darcy-Weibach

$$Hf = f \frac{L v^2}{D 2g} = 0.0192 \frac{3500}{0.1} \frac{1}{2(9.81)} v^2$$

$$Hf = 34.25 v^2$$

Sust. en Bernoulli

$$20 = 0.051 v^2 + 34.25 v^2$$

$$v = 0.763 \text{ m/s}$$

Que prácticamente es la misma velocidad que la iteración anterior, así que la consideramos correcta y con ésta calculamos el gasto

$$Q = Av = \frac{\pi}{4} D^2 v = \frac{\pi}{4} 0.1^2 (0.763)$$

$$Q = 0.0060 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 6.0 \frac{\text{lt}}{\text{s}}$$

¿Qué gasto se obtendría si no realizara la última iteración?

A la luz de los resultados ¿Qué correcciones habría que hacerle a la figura?

Obsérvese que también podría iniciarse con un valor propuesto para  $v$  o para  $f$ .

**Ejemplo 5.3** Encontrar el diámetro de la tubería de hierro fundido recubierta con asfalto requerido para conducir 300 lt/s de agua con una pérdida de carga de 4.5 m por cada 1000 m de longitud. Considerar una temperatura de 10°C.

**Solución:** Proponemos una velocidad de 1 m/s. Con ella calculamos el diámetro y Re

$$Q = Av = \frac{\pi}{4} D^2 v$$

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0.3)}{\pi(1)}} = 0.618 \text{ m}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1(0.618)}{1.306 \times 10^{-6}} = 4.7 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.12 \text{ mm}}{618 \text{ mm}} = 0.0002$$

De Moody

$$F = 0.0157$$

de Dacy-Weisbach despejamos v

$$Hf = f \frac{L v^2}{D 2g}$$

$$v = \sqrt{\frac{h_f D 2g}{f L}} = \sqrt{\frac{4.5(0.618)2(9.81)}{(0.0157)(1000)}}$$

$$v = 1.865 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad iniciamos la **1ª iteración**

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0.3)}{\pi(1.865)}} = 0.452 \text{ m}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.865(0.452)}{1.306 \times 10^{-6}} = 6.46 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.12 \text{ mm}}{452 \text{ mm}} = 0.0003$$

De Moody

$$f = 0.016$$

$$v = \sqrt{\frac{h_f D 2g}{f L}} = \sqrt{\frac{4.5(0.452)2(9.81)}{(0.016)(1000)}}$$

$$v = 1.579 \text{ m/s}$$

**2ª iteración**

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0.3)}{\pi(1.579)}} = 0.492 \text{ m}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.579(0.492)}{1.306 \times 10^{-6}} = 5.95 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.12 \text{ mm}}{492 \text{ mm}} = 0.0002$$

De Moody

$$f = 0.0152$$

$$v = \sqrt{\frac{h_f D 2g}{f L}} = \sqrt{\frac{4.5(0.492)2(9.81)}{(0.0152)(1000)}}$$

$$v = 1.69 \text{ m/s}$$

**3ª iteración**

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0.3)}{\pi(1.69)}} = 0.475 \text{ m}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.69(0.475)}{1.306 \times 10^{-6}} = 6.15 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.12 \text{ mm}}{475 \text{ mm}} = 0.0003$$

De Moody

$$f = 0.016$$

$$v = \sqrt{\frac{h_f D 2g}{f L}} = \sqrt{\frac{4.5(0.475)2(9.81)}{(0.016)(1000)}}$$

$$v = 1.62 \text{ m/s}$$

Como podemos ver, esta velocidad es bastante aproximada a la de la segunda iteración, por lo cual podemos detener el proceso y calcular el diámetro teórico final

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0.3)}{\pi(1.62)}} = 0.485 \text{ m}$$

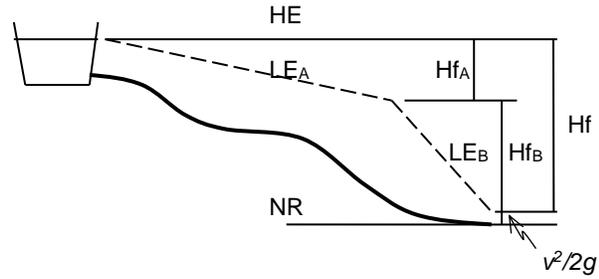
Como este diámetro no existe en el comercio, se escoge el diámetro comercial inmediato superior, en este caso sería:

$$D = 20'' = 0.50 \text{ m}$$

Con lo cual se garantiza que las pérdidas serán menores y que la tubería funcione satisfactoriamente.

¿Cuánto valen las pérdidas con el diámetro comercial encontrado?

**Ejemplo 5.4** buscar la combinación de diámetros comerciales de tubería de asbesto cemento para conducir 330 lt/s de agua por una longitud de 5000 m con un desnivel topográfico entre la superficie libre del tanque y la salida de la tubería de 98 m



**Solución:** haremos un cálculo previo de velocidades con varios diámetros comerciales:

$$Q = Av = \frac{\pi}{4} D^2 v$$

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(0.330)}{\pi D^2} = \frac{0.4202}{D^2}$$

En esta Ec. sust. Distintos diámetros y los resultados los organizamos en la sig. tabla

	D (m)	v (m/s)
D <sub>1</sub>	0.250	6.723
D <sub>2</sub>	0.300	4.668
D <sub>3</sub>	0.350	3.430
D <sub>4</sub>	0.400	2.626

El diámetro D<sub>1</sub> produce una velocidad demasiado alta, así que lo descartamos. Calculamos Re con los otros diámetros y estimamos las pérdidas

$$Re_2 = \frac{VD}{\nu} = \frac{4.668(0.3)}{1.306 \times 10^{-6}} = 1.07 \times 10^6$$

$$Re_3 = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.43(0.35)}{1.306 \times 10^{-6}} = 9.19 \times 10^5$$

$$Re_4 = \frac{VD}{\nu} = \frac{2.626(0.4)}{1.306 \times 10^{-6}} = 8.04 \times 10^5$$

Para asbesto cemento  $\epsilon = 0.025$  mm

$$\frac{\epsilon}{D_2} = \frac{0.025 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 0.0001$$

$$\frac{\epsilon}{D_3} = \frac{0.025 \text{ mm}}{350 \text{ mm}} = 0.0001$$

$$\frac{\epsilon}{D_4} = \frac{0.025 \text{ mm}}{400 \text{ mm}} = 0.0001$$

De Moody

$$f_2 = 0.0135$$

$$f_3 = 0.0136$$

$$f_4 = 0.0137$$

Pérdidas por Darcy Weisbach

$$H_{f2} = f \frac{L v^2}{D 2g} = 0.0135 \frac{5000}{0.3} \frac{4.66^2}{2(9.81)}$$

$$= 250m$$

$$H_{f3} = f \frac{L v^2}{D 2g} = 0.0136 \frac{5000}{0.35} \frac{3.43^2}{2(9.81)}$$

$$= 116.5m$$

$$H_{f4} = f \frac{L v^2}{D 2g} = 0.0137 \frac{5000}{0.4} \frac{2.626^2}{2(9.81)}$$

$$= 60.2m$$

Entonces se requiere una combinación del D<sub>3</sub> y D<sub>4</sub>. Encontramos la pendiente hidráulica

$$S_3 = \frac{H_{f3}}{L} = \frac{116.5}{5000} = 0.0233 \text{ m/m}$$

$$S_4 = \frac{H_{f4}}{L} = \frac{60.2}{5000} = 0.0120 \text{ m/m}$$

A partir de la figura, Bernoulli se puede escribir

$$Z_1 = +H_{f3} + H_{f4} + \frac{v_3^2}{2g}$$

La energía de velocidad a la salida será

$$\frac{v_3^2}{2g} = \frac{3.43^2}{19.62} = 0.599 \cong 0.6m$$

$$Z_1 - \frac{v_3^2}{2g} = +H_{f3} + H_{f4} = 98 - 0.6$$

$$H_{f3} + H_{f4} = S_3 L_3 + S_4 L_4 = 97.4 m$$

$$L_3 + L_4 = 5000 m$$

$$L_4 = 5000 - L_3$$

$$0.0233 L_3 + 0.012(5000 - L_3) = 97.4 m$$

$$0.0113 L_3 = 37.4$$

$$L_3 = 3309.7 m$$

$$L_4 = 1690.3 m$$

### 5.4 Pérdidas locales

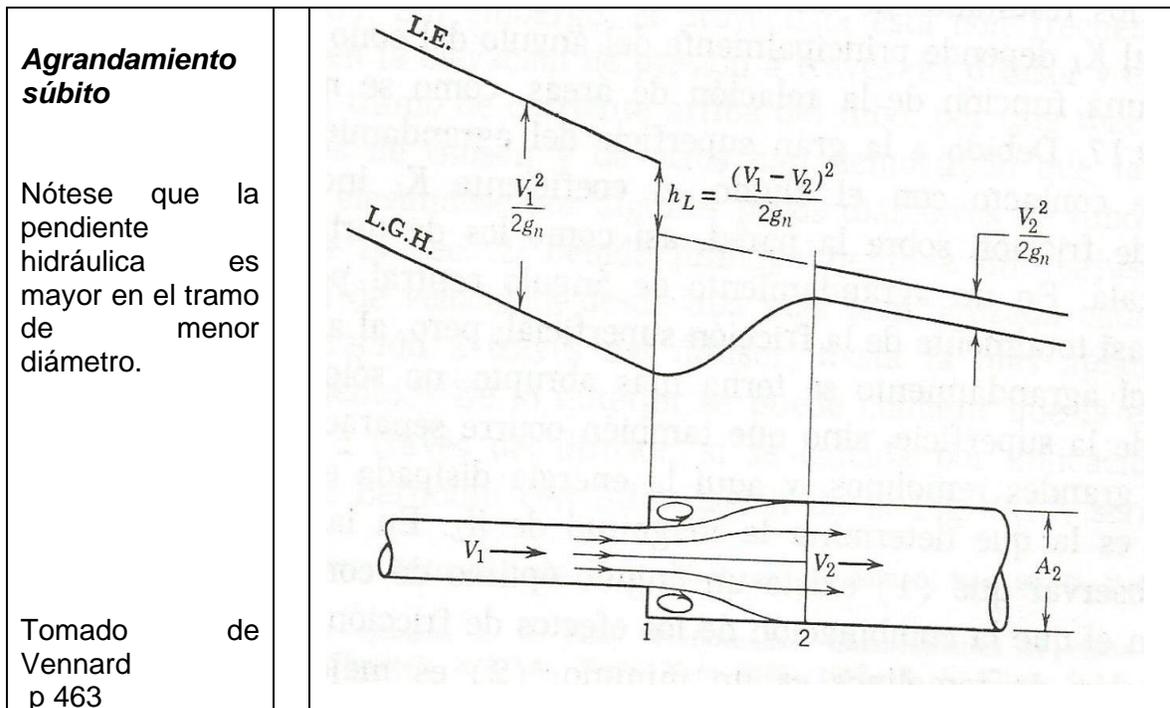
Además de las pérdidas de energía por fricción, existen otras denominadas **pérdidas locales** ocasionadas por cambios bruscos en la geometría de los conductos, como los que se presentan en codos, reducciones, bifurcaciones, válvulas y toda clase de dispositivos y accesorios que forman parte de los sistemas de tuberías. El cambio de geometría ocasiona un incremento en la turbulencia y otros comportamientos complejos del flujo que originan las pérdidas locales; sin embargo, se pueden expresar mediante una ecuación general, como una fracción de la energía específica de velocidad, aguas abajo del dispositivo o sitio donde se produjo la pérdida. La expresión general de las pérdidas locales es:

$$H_L = K \frac{v^2}{2g}$$

Donde:  $H_L$  es la pérdida de carga local expresada en m,  $v^2/2g$  es la energía específica de velocidad aguas debajo de la zona de alteración del flujo (salvo aclaración contraria) y  $K$  es un coeficiente adimensional que depende del tipo de accesorio que se trate, es determinado experimentalmente y está recopilado en tablas y nomogramas.

#### Pérdida por ampliación.

Cuando ocurre un **agrandamiento súbito** de la sección en una tubería, tiene lugar una rápida desaceleración, acompañada por una turbulencia característica de gran escala, la que puede persistir en el tubo más grande por una distancia de 50 diámetros o más antes de que se restablezca el patrón normal de turbulencia.



Esta pérdida se calcula con:

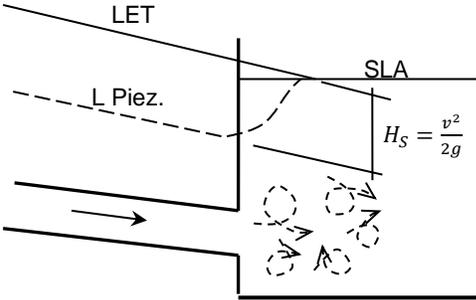
$$H_L = K_L \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

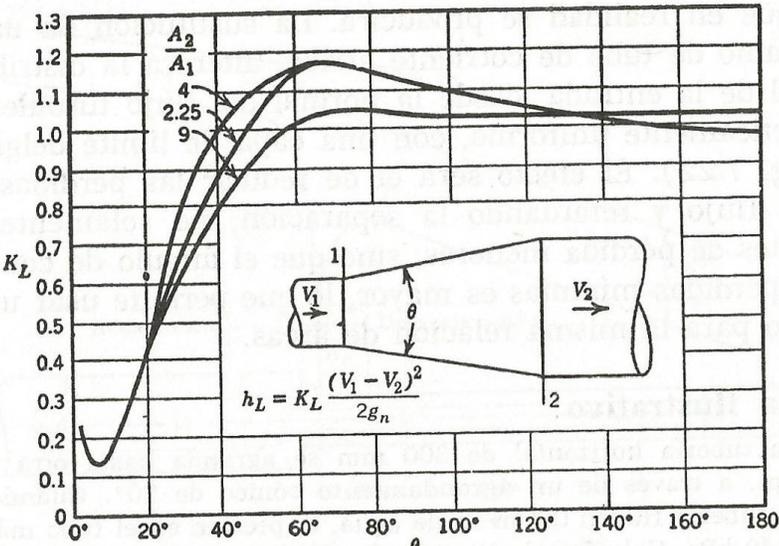
Donde  $K_L \approx 1$  para agrandamiento súbito.

Un caso especial es Cuando un tubo **descarga dentro de un tanque**, en este caso, la velocidad corriente abajo  $v_2$  se puede tomar como cero, que al sustituir en la ecuación anterior indica que la pérdida por descarga en un tanque o pérdida de salida, es igual a la energía de velocidad

$$H_L = \frac{(v_1)^2}{2g}$$

Esto significa que toda la energía de velocidad existente en la tubería se disipa en la turbulencia que se ocasiona a la entrada del tanque.

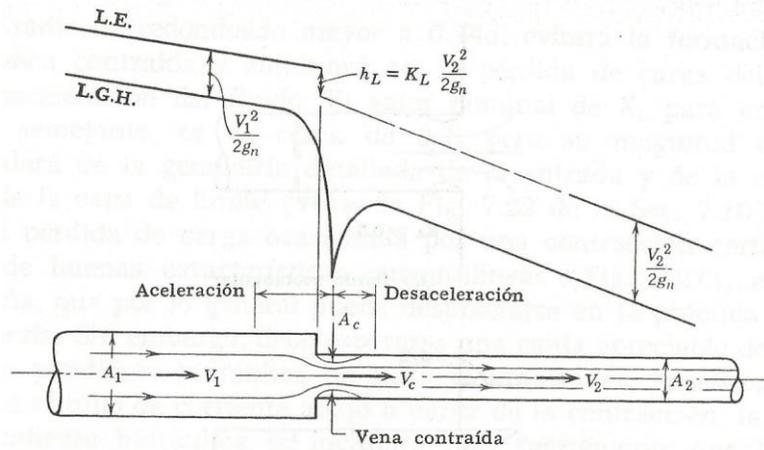
<p>Otra manera de explicarlo es considerar que al ser flujo permanente, la superficie libre del agua mantiene su nivel, por lo cual, en la superficie, la velocidad es cero; pero a la salida de la tubería sumergida en el tanque si hay velocidad, de manera que esa energía se pierde en la turbulencia dentro del tanque.</p>	
---	---

<p>Para <b>agrandamiento gradual</b> <math>K_L</math> toma otros valores de acuerdo a la figura siguiente:</p> <p>Tomado del Vennard p 465</p>	
--	--

**Pérdida por reducción brusca.**

En la figura se muestra el flujo a través de una reducción súbita, el cual se caracteriza por la contracción de la vena líquida y la consecuente aceleración y posterior desaceleración de la corriente del fluido

Tomado del Vennard p 467



El coeficiente  $K_L$  depende de la relación de áreas  $A_2/A_1$  de acuerdo con la tabla siguiente:

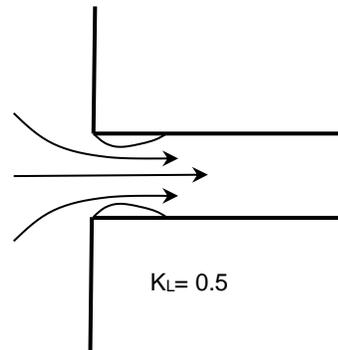
$A_2/A_1$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$C_c$	0.671	0.624	0.623	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.892	1.00
$K_L$	0.50	0.46	0.41	0.36	0.3	0.24	0.18	0.12	0.06	0.02	0

Vennard p 467

Que también contiene un coeficiente de contracción de la vena líquida como una fracción del área aguas abajo  $C_c = A_c/A_2$

El caso extremo de una contracción súbita es la **conexión de un tanque a una tubería** alimentada por el primero, en este caso  $A_1$  es extraordinariamente grande, con lo cual la relación de áreas se considera cero  $A_2/A_1 = 0$  y el coeficiente  $K_L = 0.5$  si el borde es rectangular.

Con bordes redondeados  $K_L$  se reducirá, información detallada al respecto se encuentra en el Sotelo A. p 298



Para otras piezas especiales como codos, bifurcaciones, válvulas, etc. se recomienda consultar El Sotelo Ávila. Los fabricantes de piezas también proporcionan la información correspondiente a cada pieza.